APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE

Eliomar Corrêa Caetano
Universidade Católica de Brasília
Orientador: Cláudio Manoel Gomes de Sousa

RESUMO

Neste trabalho estudamos três aplicações das equações de Euler-Lagrange, sendo duas para osciladores harmônicos, o pêndulo simples e o sistema massa-mola, ambos abordados em sua forma trivial, sem forças externas e dissipativas, e a terceira aplicação, que é o principal objetivo desse trabalho, consiste na busca de uma equação que esteja associada ao movimento de uma partícula a cada instante, quando esta, percorre a rampa de um escorregador ("tobogã"). Para esse último caso, a equação diferencial resultante foi resolvida pela utilização de métodos numéricos, onde apresentamos o código utilizado para a solução com auxílio de computação algébrica.

Palavras-chave: energia; equações de Euler-Lagrange.

1. INTRODUÇÃO

Existe um parque situado na cidade de Brasília, capital do Brasil, onde encontramos um brinquedo que, talvez, chame a atenção de quem já estudou um pouco de equações diferenciais. Trata-se da rampa de um escorregador, que está ilustrada a seguir:

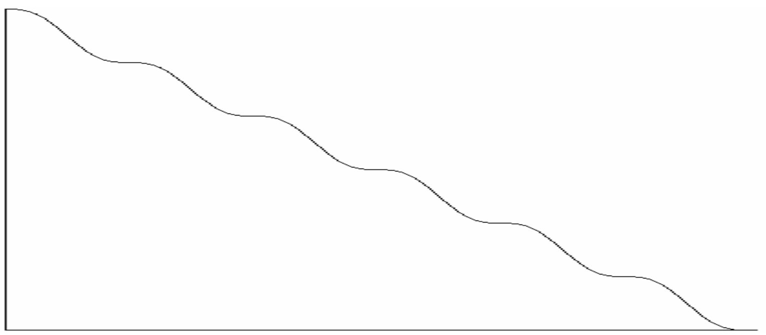

Figura 1 – Uma idéia de como seria o escorregador.

Para uma curva desse tipo, poderíamos fazer a seguinte pergunta: É possível encontrar uma equação que esteja associada ao movimento da partícula que descreve o trajeto da rampa em um instante qualquer? Denotaremos esta questão como o "Problema do Escorregador".

Em princípio, ao tentarmos responder a pergunta anterior, teremos a situação de que as forças que atuam no sistema são variantes, por exemplo, a força normal, a força peso, entre outras. Mesmo com esse impasse é possível persistir no problema, visto que no decorrer da história, por volta de 1686, Johann Bernoulli propôs a seguinte questão:

Considere uma partícula de massa m, deslizando sob a ação da gravidade, ao longo de uma certa curva Γ do ponto P ao ponto Q, que estão fixados.Se a partícula parte do repouso, qual deve ser a forma de Γ para que o tempo do percurso seja mínimo? Despreze o atrito e outras forças dissipativas (Butkov, 1983).

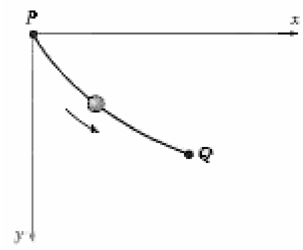

Figura 2 – A partícula percorrendo do ponto P ao ponto Q.

O próprio Johann Bernoulli resolveu esse problema. A curva que determina esse tempo ótimo é chamada de *braquistócrona.*

A semelhança entre o referido problema de Bernoulli e o problema do escorregador é que, ambos pretendem que uma partícula descreva um determinado trajeto. Como foi resolvido o problema da braquistócrona, é natural pensar acerca do problema do escorregador.

Uma maneira de resolver o problema da braquistócrona é por meio das *equações de Euler-Lagrange* (Butkov, 1983). Essas equações são derivadas da energia cinética e potencial gravitacional da partícula.

1.1. Euler-Lagrange

Para um sistema conservativo (onde somente atuam forças conservativas) é possível escrever uma função da posição e da velocidade de uma partícula, denominada *energia mecânica*, que se conserva durante todo o movimento.

Sejam

$$T = \frac{1}{2} m v^2 ,$$

$$V = mgh ,$$

a *energia cinética*(T) e a *energia potencial gravitacional*(V), respectivamente, do sistema, em que as variáveis envolvidas são

m : massa da partícula,

v : velocidade da partícula,

g : aceleração da gravidade,

h : altura da partícula (posição);

então a energia mecânica é definida por

$$E = T + V .$$

A energia que um corpo possui quando está em movimento é denominada energia cinética e, a energia potencial gravitacional, é aquela que um corpo possui quando está situado a uma determinada altura da superfície da Terra (Tipler, 2000).

As leis da mecânica são tais que, a posição e a velocidade de uma partícula combinam suas variações, de modo que E não se altera.

Consideremos uma outra função das variáveis de movimento de um sistema conservativo, a *lagrangiana* L, definida por

$$L = T - V\ . \tag{1}$$

A lagrangiana tem as mesmas dimensões da energia, ou seja, no Sistema Internacional sua unidade de medida é o *Joule.*

Observe que, se uma pedra de massa m estiver caindo a partir do repouso, de uma altura h, tomando-se $h = 0$ como referência para a energia potencial, a lagrangiana terá inicialmente o valor $-mgh$ e, antes da pedra atingir o solo, o valor da função (1) será mgh.

O físico-matemático *Joseph-Louis Lagrange* (1736-1813) observou em 1764 que:

Como a pedra gastará um tempo t para cair, então ela otimizará a variação da sua velocidade durante a queda de tal modo que a integral

$$S = \int_0^t L dt$$

atinja o menor valor possível (Chaves, 2001).

A integral no tempo da lagrangiana do sistema entre dois instantes t_1 e t_2 é denominada *ação S do sistema* neste intervalo de tempo. Ou seja,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt\ . \tag{2}$$

O *princípio da ação mínima* estabelece que a integral S em (2), atinja o menor valor possível. Então, a ação que se pretende minimizar tem a forma

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} m v^2 - mgh \right] dt.$$

Em coordenadas cartesianas, a configuração de um sistema com N partículas pode ser especificada pelas $3N$ coordenadas cartesianas x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_N, y_N, z_N de suas partículas, ou por qualquer conjunto de $3N$ coordenadas generalizadas q_1, q_2, ..., q_{3N}. Para simplificar, chamaremos de q_k a *posição* de uma partícula em qualquer sistema de coordenadas, e para uma função qualquer $u = u(t)$, denotaremos a derivada temporal por $\frac{du}{dt} = \dot{u}$.

Assim, podemos escrever (1) como

$$L = T(\dot{q}) - V(q)\ .$$

Finalmente, pelo *princípio da ação mínima*, de (2) obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1,...,3N\ ; \tag{3}$$

que são denominadas *equações de Euler-Lagrange* (Symon, 1982).

Vale ressaltar que não se aplicam as equações de Euler-Lagrange em casos onde se deseja considerar as forças de atrito de um determinado sistema.

A expressão que aparece em (3) é denominada *equações de Euler-Lagrange* porque o matemático suíço *Leonard Euler* (1707-1783) contribuiu consideravelmente para a formulação do princípio da ação mínima.

2. MÉTODOS

Para resolver o problema do escorregador, que é o principal objetivo desse trabalho, aproximaremos a função exata da rampa por uma função cujo gráfico descreve uma trajetória similar. Nesse contexto, definimos

$$y(x(t)) = 10 - x(t) + sen(x(t))\,. \tag{4}$$

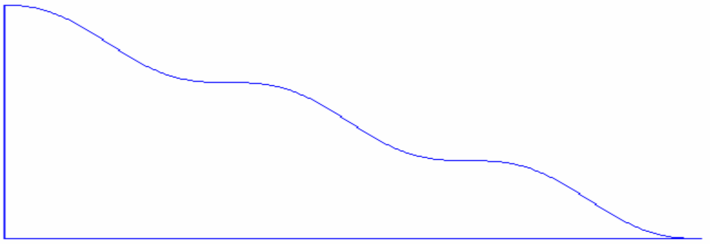

Figura 3 – A função y(x) proposta em (4) é um caso elementar da função que descreve exatamente a rampa.

Antes de tentar encontrar a equação que descreve a trajetória da partícula em (4), serão analisados dois problemas: o pêndulo simples e o sistema massa-mola. Obteremos as *equações diferenciais* de ambos os sistemas por meio da mecânica de Newton e, em seguida, por meio das equações de Euler-Lagrange.

2.1. Pêndulo Simples

O pêndulo simples consiste de uma partícula de massa m fixada na extremidade inferior de um fio de comprimento l, cuja extremidade superior está fixa. Supõe-se que o movimento ocorre em um plano vertical (Boyce, 2002).

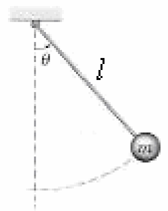

Figura 4 – Uma configuração do pêndulo simples.

2.1.1. Mecânica de Newton e o pêndulo simples

Deseja-se determinar o ângulo θ, medido entre o fio e a vertical, em qualquer instante do tempo. Assim, θ é uma função do tempo, isto é,

$$\theta = \theta(t)\,.$$

A intenção é apenas obter uma equação diferencial associada ao pêndulo simples. Por isso, serão desprezadas a massa do fio e possíveis forças dissipativas. A partícula será abandonada em uma posição $\theta_1 = \theta(0)$ e observar-se-á o seu movimento.

Nesse contexto, o movimento da partícula descreve um arco de raio l, cujo comprimento s é igual a $l\theta$.

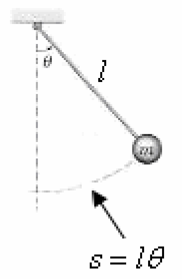

Figura 5 – Indicação do comprimento do arco s.

Derivando $s = l\theta$, em função de t, obtemos a velocidade da partícula, denotada por

$$\frac{ds}{dt} = l\frac{d\theta}{dt}$$

e, consequentemente, a segunda derivada fornece a aceleração

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Observemos que o comprimento do fio l permanece constante. As igualdades acima podem ser escritas como

$$\dot{s} = l\dot{\theta} \text{ e } \ddot{s} = l\ddot{\theta}.$$

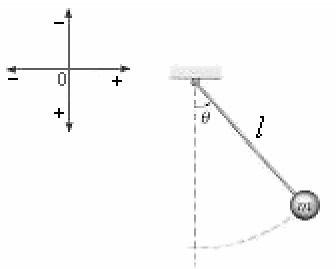

Figura 6 – Definamos que, para baixo e para a direita o sistema é positivo, e à esquerda e para cima o sentido é negativo.

O peso da partícula é dado por $w = mg$. Como existe uma força contrária (F_c) ao movimento da partícula, então essa força é negativa. Do triângulo retângulo formado pelas componentes da força, conclui-se que

$$F_c = -mgsen\theta.$$

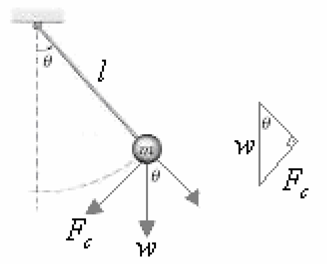

Figura 7 – Obtenção da componente F_c relacionada com o *seno* do ângulo θ.

A *segunda lei de Newton* estabelece que a força é igual a massa vezes a aceleração ($F = ma$). Como a aceleração da partícula é $\ddot{s} = l\ddot{\theta}$, conforme visto anteriormente, então podemos escrever

$$ml\ddot{\theta} = F_c ,$$

$$ml\ddot{\theta} = -mgsen\theta ,$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} sen\theta = 0 . \qquad (5)$$

Assim, concluímos que a equação (5) está associada ao pêndulo simples.

2.1.2. Equações de Euler-Lagrange e o pêndulo simples

Nesta seção iremos analisar a energia cinética (T) e a energia potencial gravitacional (V), relacionadas com o pêndulo simples.

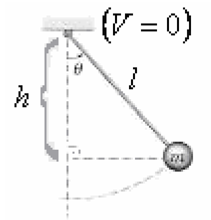

Figura 8 – A posição da massa fica abaixo da posição onde a energia potencial gravitacional é nula, conforme definido abaixo.

Da ilustração acima concluímos que $h = l\cos\theta$. É importante ressaltar que, com o objetivode simplificar os cálculos, será considerada uma energia potencial gravitacional nula para a horizontal que determina o "teto", onde o pêndulo está fixado. Então, a posição da partícula define uma energia potencial gravitacional negativa, pois o potencial gravitacional é definido em função da altura do objeto em relação à superfície da Terra. Assim,

$$T = \frac{1}{2} m(l\dot{\theta})^2 ,$$

$$V = -mg(l\cos\theta) .$$

Neste caso, a função Lagrangiana é dada por

$$L = (\frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2) - (-mgl\cos\theta) ,$$

e a equação de Euler-Lagrange (observe que: $q = \theta(t)$) torna-se

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0 ,$$

$$\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\theta}\right) - \left(-mglsen\theta\right) = 0 ,$$

que pode ser escrita como

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} sen\theta = 0 .$$

Observe que a última igualdade é a mesma equação (5) obtida na seção anterior.

Pela dificuldade de encontrarmos um modelo matemático para o problema do escorregador utilizando a *Mecânica de Newton*, escolhemos as equações de Euler-Lagrange para tentar encontrar a equação associada a esse problema. Antes de estudar o problema do escorregador, mais um exemplo será resolvido, o de sistema massa-mola. Seguindo a mesma linha, primeiro será resolvido pensando apenas na *Mecânica Newtoniana* e, em seguida, por meio das *equações de Euler-Lagrange*.

2.2. O sistema massa-mola

Um sistema massa-mola é constituído por uma mola vertical, de comprimento ℓ e massa desprezível, fixada num teto e uma partícula de massa m presa na extremidade inferior da mola. Ao se fixar a massa na extremidade inferior da mola, ela sofre um deslocamento x_0. Definamos por $x(t)$ a posição da mola na vertical, quando ela for abandonada em uma posição $x_1 = x(0)$ (Boyce, 2002).

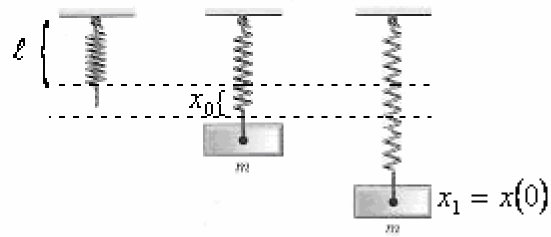

Figura 9 – Inicialmente a massa está em uma posição x_1.

2.2.1. Mecânica de Newton e o sistema massa-mola.

Após o deslocamento x_0, conforme a seção anterior, a mola passa a uma nova posição de equilíbrio. Esse equilíbrio deve-se ao fato de que a força F_m da mola tem a mesma magnitude do peso da massa. A força F_m é determinada pela chamada *Lei de Hooke*. Essa lei garante que a força da mola é proporcional ao seu deslocamento, ou seja, $F_m = kx$. A constante k é a rigidez da mola; em outras palavras, ela indica o quanto uma mola é "dura".

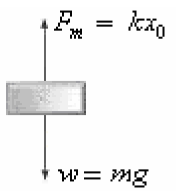

Figura 10 - Na posição de equilíbrio, a força peso e a força da mola têm a mesma magnitude.

Nesse sistema, é possível determinar a posição x da massa em qualquer instante. Desse modo, x é uma função do tempo

$$x = x(t),$$

conforme definido na seção anterior.

A configuração do sistema massa-mola determina um único grau de liberdade, que é a vertical. Será considerado que a origem do sistema de coordenadas é a posição de equilíbrio, incluindo o sentido positivo para baixo, conforme ilustrado a seguir.

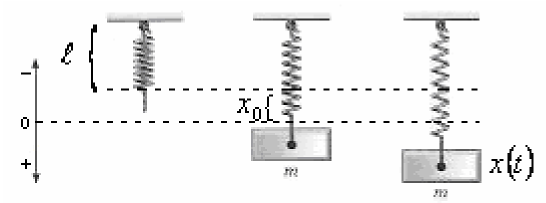

Figura 11 – A mola de comprimento ℓ em um primeiro momento e, em seguida, deslocada de x_0 após a massa ser fixada. No último momento a massa encontra-se em uma posição $x(t)$.

A massa é puxada para baixo em uma posição $x_1 = x(0)$ e abandonada. Pode ocorrer em algum momento que $x(t) + x_0 > 0$; nesse caso, a mola estará estendida e sua força será $F_m = -k(x(t) + x_0)$. O sinal negativo é atribuído ao fato da mola estar "puxando" para cima, no sentido contrário ao movimento. Se $x(t) + x_0 < 0$, então a mola estará comprimida e sua força será no sentido positivo; logo, $F_m = k|x(t) + x_0|$. Que é equivalente a escrever que $F_m = -k(x(t) + x_0)$. Portanto, em qualquer caso, temos que $F_m = -k(x(t) + x_0)$.

Por outro lado, pela segunda lei de Newton, temos que $x(t)$ está relacionado às forças que agem sobre a massa, pela fórmula

$$m\ddot{x}(t) = f(t), \qquad (6)$$

onde $\ddot{x}(t)$ é a aceleração da massa e $f(t)$ é a força total agindo sobre a ela.

Como a idéia é determinar a equação diferencial mais trivial desse sistema, desprezamos quaisquer forças dissipativas e outros fatores externos. Desse modo, é possível afirmar que as únicas forças atuantes no sistema são a peso $w = mg$ e a da mola $F_m = -k(x(t) + x_0)$. Assim a força $f(t)$ que aparece na equação (6), é

$$f(t) = w + F_m$$
$$f(t) = mg - k(x(t) + x_0).$$

Logo, a equação (6) é escrita como

$$m\ddot{x}(t) = mg - k(x(t) + x_0),$$
$$m\ddot{x}(t) = mg - kx(t) - kx_0. \qquad (7)$$

Observando a Figura 10, concluímos que

$$mg = kx_0 \Rightarrow mg - kx_0 = 0.$$

Assim, a equação (7), se reduz a

$$m\ddot{x} + kx = 0, \qquad (8)$$

que é a equação diferencial associada ao sistema massa-mola, onde não há influência de forças externas e possíveis forças dissipativas.

2.2.2. Equações de Euler-Lagrange e o sistema massa-mola.

Afim de obter uma equação diferencial para o sistema massa-mola utilizando as equações de Euler-Lagrange, é necessário definir a energia cinética do sistema e a energia potencial gravitacional.

Com o objetivo de tornar simples o processo de modelagem, a energia potencial gravitacional será definida como nula no teto, e o sentido positivo iniciará abaixo de onde a mola foi fixada. Em outras palavras, isso significa que independente da posição da mola, esta sempre estará numa posição positiva.

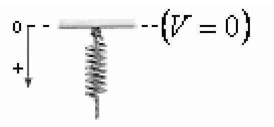

Figura 12 – A energia potencial no sistema massa-mola foi definida nula na altura onde a mola foi fixada e, o sentido positivo para baixo.

Nesse momento, é importante que sejam levados em conta alguns detalhes. A energia potencial gravitacional é negativa de qualquer forma; isso porque a massa está sempre abaixo da posição onde a energia potencial gravitacional foi definida como nula. A maneira como foi definido o sistema, sendo positivo para baixo, não implica que o potencial gravitacional deve ser positivo; devemos observar que o potencial gravitacional é relativo à altura que um objeto encontra-se da superfície da Terra.

Outra observação importante sobre a energia potencial gravitacional que a massa possui é que ela não é apenas $V = -mg(x(t) + x_0)$. No caso do pêndulo simples, o fio que prende a massa não interfere no potencial gravitacional. Mas devemos notar que a mola participa definitivamente do potencial. O trabalho

$$\psi = Fx \tag{9}$$

que uma força efetua quando desloca um corpo é proporcional ao seu deslocamento (Tipler, 2000). Tanto a energia potencial gravitacional quanto o trabalho, são medidos *Joule*.

$$1N.m = 1J\ ,$$

na expressão acima (9), as unidades envolvidas são:

N : unidade de medida de força (newtons),

m : unidade de medida de distância (metros).

Aplicando a força de $1N$ (um newton) em um corpo, para que este desloque por $1m$ (um metro), o trabalho efetuado pela força será de $1J$ (um *Joule*). Ora, se a mola influencia no potencial gravitacional da massa, então como poderíamos definir essa influência?

Uma relação que existe entre o trabalho efetuado por uma força e o potencial gravitacional é que a variação do trabalho efetuado por uma força (Tipler, 2000) satisfaz a seguinte igualdade

$$\Delta V = -\Delta\psi\ . \tag{10}$$

Podemos ainda escrever (10) como

$$\Delta V = -F\Delta x\ . \tag{11}$$

Já que estamos querendo definir a influência da mola no potencial, então, a força que aparece em (11) é justamente à da mola, $-kx$. Então, escrevemos (11) em termos infinitesimais como sendo,

$$dV = kxdx\ . \tag{12}$$

Integrando (12), chegamos a uma nova expressão

$$V_m = \frac{1}{2}kx^2 , \tag{13}$$

que é chamada de *energia potencial elástica* da mola. Pela rigidez da mola, estando ela estendida ou comprimida, a equação (13) nos mostra que o seu potencial elástico V_m é sempre positivo em nosso sistema.

Finalmente, estando a massa em alguma posição $x(t) + x_0$, definimos

$$T = \frac{1}{2}m\left[\frac{d}{dt}\left(x(t) + x_0\right)\right]^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

e utilizando (13), podemos definir o potencial gravitacional do sistema como,

$$V = -mgh + \frac{1}{2}kx^2 ,$$

$$V = -mg(x(t) + x_0) + \frac{1}{2}k(x(t) + x_0)^2 .$$

Escrevendo a função Lagrangiana,

$$L = T - V ,$$

obtemos

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mg\left(x + x_0\right) - \frac{1}{2}k\left(x + x_0\right)^2 ;$$

e a equação de Euler-Lagrange fica determinada como,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0 ,$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}\right) - (mg - kx - kx_0) = 0 . \tag{14}$$

Da posição de equilíbrio, concluímos que em (14), dentro do segundo parêntesis, teremos apenas o termo $-kx$; assim obtemos novamente a equação

$$m\ddot{x} + kx = 0 . \tag{15}$$

2.3. O Caso do Escorregador

Antes de escrevermos a função lagrangiana da equação (4), observe que quando a partícula percorre uma pequena distância na rampa, é possível considerar termos infinitesimais, e sua velocidade será $\frac{ds}{dt}$, quando s for um deslocamento infinitesimal.

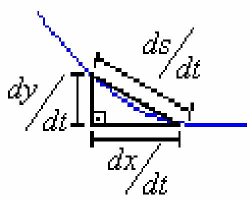

Figura 13 – Para uma distância s infinitesimal, a velocidade da partícula será ds/dt; pelo teorema de Pitágoras, segue $\frac{ds}{dt} = \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

As energias cinética e a potencial gravitacional da partícula que percorre a rampa definida pela equação (4), são

$$T = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \text{ e} \tag{16}$$

$$V = mgy\,.$$

Consideremos que a energia potencial gravitacional é positiva em qualquer ponto da rampa.

Derivando, a função definida em (4), obtemos

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = -\dot{x} + \dot{x}\cos x\,,$$

e substituindo em (16), temos

$$T = \frac{1}{2} m\left[\dot{x}^2 + (-\dot{x} + \dot{x}\cos x)^2\right].$$

Consequentemente, a função lagrangiana é definida por

$$L = \frac{1}{2} m\left[\dot{x}^2 + (-\dot{x} + \dot{x}\cos x)^2\right] - mg(10 - x + senx)\,; \tag{17}$$

e a equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0\,,$$

$$\frac{d}{dt}\left[m\dot{x}\left(\cos^2 x - 2\cos x + 2\right)\right] - \left[\frac{1}{2} m\dot{x}^2\left(-2senx\cos x + 2senx\right) + mg - mg\cos x\right] = 0$$

$$m\ddot{x}\left(\cos^2 x - 2\cos x + 2\right) + m\dot{x}^2\left(-2senx\cos x + 2senx + senx\cos x - senx\right) - mg + mg\cos x = 0$$

$$\ddot{x}\left(\cos^2 x - 2\cos x + 2\right) + \dot{x}^2\left(senx - senx\cos x\right) - g + g\cos x = 0\,. \tag{18}$$

A equação (18) é a equação diferencial associada ao problema do escorregador. Agora, é necessário obter a função $x(t)$ que satisfaz a equação (18). Pelo fato de aparecer junto às derivadas as funções trigonométricas vinculadas à variável t, então, aparentemente, não é possível encontrar uma solução analítica.

Mesmo não sendo possível encontrar a solução analítica de (18), é possível observar o comportamento da função $x(t)$ procurada. A maneira de se fazer isso é através de uma solução numérica. Dentre tantos métodos numéricos existentes, utilizamos pelo software Maple, o método clássico de Runge-Kutta (Barroso, 1987).

Para isso, modificaremos a equação (18) e, em seguida, faremos uma substituição de variável para que a equação possa ser resolvida sob um sistema de equações diferenciais através do método de Runge-Kutta.

Como o método de Runge-Kutta resolve apenas equações de 1ª ordem, devemos transformar uma equação diferencial de 2ª ordem em duas de 1ª ordem, como mostraremos a seguir.

O primeiro passo a ser dado em busca de uma solução numérica é preparar a equação (18) para a forma

$$P\ddot{x} + Q\dot{x}^2 = R \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{R}{P} - \frac{Q}{P}\dot{x}^2 .$$

Escrevendo (18) na forma acima,

$$\ddot{x} = \frac{g(1-\cos x)}{\cos^2 x - 2\cos x + 2} - \frac{senx - senx\cos x}{\cos^2 x - 2\cos x + 2}\dot{x}^2 .$$

Definamos $\dot{x} = W$, logo, $\ddot{x} = \dot{W}$. Assim, podemos escrever um sistema de equações diferenciais,

$$\begin{cases} \dot{x} = W \\ \dot{W} = \dfrac{R}{p} - \dfrac{Q}{P}W^2 \end{cases} \tag{19}$$

Assim, fica definido que a velocidade da partícula é W. Para resolver (18), definimos

$$x(0) = 0.1\,\text{m e } W(0) = 0 \text{ m/s,} \tag{20}$$

que são as condições iniciais. A definição de (20) é atribuída ao fato de que a partícula estará, inicialmente, em um ponto próximo a parte mais alta da rampa, em que partirá do repouso.

O valor de $x(t)$ inicialmente será 0.1, pois, se $x(0) = 0$, então a partícula não entraria em movimento; tendo em vista que esta, por sua vez, não sofre influência de forças externas. Em outras palavras, se a partícula parte do repouso e $x(t) = 0$, então ela não poderá entrar em movimento.

No software Maple, entramos com os comandos

```
> y(x(t)) := 10 - x(t) + sin(x(t));
> g := 9.8;
> P(x(t)) := cos(x(t))^2 - 2*cos(x(t)) + 2;
> Q(x(t)) := sin(x(t)) - sin(x(t))*cos(x(t));
> R(x(t)) := g*(1-cos(x(t)));
> with(plots):
> dsys := diff(x(t),t) = w(t), diff(w(t),t) = R(x(t))/P(x(t)) - (Q(x(t))/P(x(t)))*(w(t))^2;
> funcs := {x(t), w(t)};
> p := dsolve({dsys, x(0) = 0.1, w(0) = 0}, funcs, type = numeric, method = classical):
> odeplot(p,[[t, x(t)],[t, w(t)]], t = 0..6);.
```

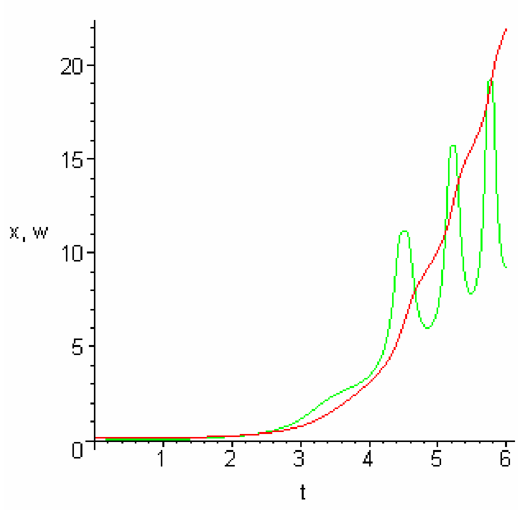

Figura 14 – A curva vermelha, descreve a variação do espaço que a partícula percorre, em função do tempo e, a curva verde, descreve a variação da velocidade da partícula em função do tempo.

Com base na figura 14, percebe-se que a velocidade da partícula tem certa oscilação, mas tende a aumentar gradativamente a cada ciclo no decorrer do trajeto; ou seja, a amplitude de oscilação de W aumenta.

3. DISCUSSÃO

O estudo das equações de Euler-Lagrange geralmente aparece ao final dos cursos de Física. Essas equações dispõem de uma maneira distinta, mas equivalente, de resolver determinadas situações-problema. Uma grande vantagem que esse tipo de equação gera é não ser necessário o uso de vetores, basta ter conhecimento da energia cinética e potencial do sistema em estudo.

Os dois primeiros problemas resolvidos foram por meio de dois métodos, nos quais o intuito era de exaltar a teoria lagrangiana e as equações de Euler-Lagrange. De modo que, para o problema do escorregador, tivéssemos uma direção a respeito dos passos a serem dados em busca da equação pretendida.

Não era esperado que a equação diferencial obtida fosse, aparentemente, insolúvel analiticamente. Para essa questão, a necessidade de uma análise da função por meio de uma solução numérica seria, em parte, satisfatória.

Ao observarmos a solução numérica, percebemos que a partícula atinge longas distâncias em “pequenos” intervalos de tempo; e a velocidade da partícula, tem uma característica oscilatória, mas com um aumento de sua amplitude no decorrer do tempo. O deslocamento e a velocidade são curiosos devido ao fato de que o atrito foi desprezado.

Admitimos, desde o início da pesquisa, que a partícula não perde contato em nenhum momento com a superfície na qual desliza. Para a condição inicial, ressaltamos que haverá a necessidade da definição, não simultânea, de valores nulos às variáveis. Quer dizer, se desejarmos que $x(0) = 0$, então $W(t)$ deverá ser diferente de zero.

Para posteriores pesquisas, existe a necessidade de considerarmos o atrito e a função que descreve exatamente a rampa. Não sabemos ainda como considerar o atrito nesse caso, mas há indícios de que existem equações similares as de Euler-Lagrange, que por sua vez, são derivadas também pelo atrito.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARROSO, Leônidas Conceição; BARROSO, Magali Maria de Araújo; FILHO, Frederico Ferreira Campos; CARVALHO, Márcio Luiz Bunte; MAIA, Miriam Lourenço. **Cálculo Numérico (com aplicações)**. 2.ed. São Paulo: Harbra, 1987.

BOYCE, Willian E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

BUTKOV, Eugene. **Física Matemática**. Rio de Janeiro: Guanabara, 1983.

CHAVES, Alaor Silvério**. Física: Mecânica**. Vol. 1. Rio Janeiro: Reichman & Affonso Ed., 2001.

SYMON, Keith R. **Mecânica**. Rio de Janeiro: Campus, 1982.

TIPLER, Paul A. **Física.** 4.ed. Vol.1. Rio de Janeiro: LTC, 2000.